



Etat de l'art de la Conception Robuste de Mécanismes

Stéphane Caro, Fouad Bennis, Philippe Wenger

► To cite this version:

Stéphane Caro, Fouad Bennis, Philippe Wenger. Etat de l'art de la Conception Robuste de Mécanismes. Journée AIP-PRIMECA, Jan 2002, Cachan, France. pp.1-10. hal-00465473

HAL Id: hal-00465473

<https://hal.science/hal-00465473>

Submitted on 19 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etat de l'art de la conception robuste de mécanismes

Stéphane Caro, Fouad Bennis et Philippe Wenger

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

Ecole Centrale de Nantes

1, rue de la Noë, B.P. 92101, 44321 Nantes cedex France

E-mail : Fouad.Bennis@ircsyn.ec-nantes.fr

Résumé

La conception robuste d'un mécanisme a pour objectif de rendre ses performances optimales et insensibles aux variations. Ce papier présente ainsi un état de l'art des méthodes utilisées en conception robuste de mécanismes. Dans un premier temps, une méthode déterministe est présentée. En l'occurrence, elle fait appel au conditionnement d'une matrice. Ensuite, quelques outils et méthodes utilisés en analyse de tolérance statistique sont énumérés. Une méthode d'optimisation statistique couramment utilisée en conception robuste de mécanismes est ainsi introduite. Enfin, la partie sur l'analyse de propriétés des mécanismes articulés a pour intérêt d'aider à la définition des fonctions critères et des contraintes qui doivent être intégrées dans la formulation du problème d'optimisation.

1. Introduction

De nos jours, l'utilisation des mécanismes articulés est très répandue dans l'industrie. On les retrouve dans des domaines très variés de la production avec des performances de plus en plus croissantes. De plus, l'apparition relativement récente des structures articulées parallèles ouvre de nouvelles perspectives en élargissant le domaine d'application à l'usinage à grande vitesse et plus généralement au travail à grande vitesse.

La conception des mécanismes et des assemblages mécaniques passe par une phase de modélisation des pièces en forme parfaite. Le modèle parfait avec les dimensions nominales est utilisé par les logiciels de simulation et de calcul pour vérifier et mettre en évidence leurs caractéristiques cinématiques et dynamiques. Ces logiciels ne prennent pas en compte les variations des paramètres dont les effets sur les performances peuvent être importants.

Il est donc nécessaire d'adapter les outils d'analyse et de synthèse afin d'optimiser les performances et de garantir la robustesse de la solution vis-à-vis des variations. Pour la conception et le dimensionnement des mécanismes articulés, il est possible de classer les activités de recherche en trois domaines complémentaires. L'objectif de ce papier est de faire une synthèse bibliographique des différents domaines et de présenter leurs interactions.

2. Les variations et la robustesse en conception

La prise en compte des variations des éléments de l'objet à concevoir a toujours été une préoccupation des concepteurs avertis. La nouveauté est de vouloir intégrer ces variations le plus tôt possible dans le processus de conception. Cela a l'avantage de prédire les problèmes relatifs aux variations afin de minimiser leurs effets sur les performances du système. Il existe plusieurs définitions de la conception robuste dans la littérature. Nous considérons dans ce papier la définition suivante: *Une solution à un problème de conception est dite robuste si elle correspond aux meilleures performances du système et qu'elle soit la moins sensible possible aux petites variations.*

Avant de décrire la formulation de la conception robuste, nous présentons les différents travaux dont l'objectif est de prédire les effets de variations.

2.1. Analyse déterministe des variations

Dans le domaine purement déterministe de l'analyse numérique matricielle, le problème de la robustesse est connu sous l'appellation de conditionnement [4]. "Un problème est mal conditionné lorsque de 'petites' variations sur les données entraînent de très 'fortes' variations sur le résultat même calculé **exactement** (sans erreur d'arrondi ni de troncature)". En effet, supposons que les performances du système à concevoir soient linéaires par rapport aux variables de conception. Ce système s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1)$$

où \mathbf{A} est une matrice définie localement en fonction des paramètres qui définissent la configuration du système, \mathbf{x} est le vecteur des variables de conception et \mathbf{f} le vecteur des performances. Le conditionnement κ_A de la matrice \mathbf{A} est défini par le rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur singulière qui sont respectivement σ_{\max} et σ_{\min} :

$$\kappa_A = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (2)$$

Il en découle les relations suivantes:

$$\frac{1}{\kappa_A} \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \leq \kappa_A \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} ; \sigma_{\min} \|\delta \mathbf{x}\| \leq \|\delta \mathbf{f}\| \leq \sigma_{\max} \|\delta \mathbf{x}\|$$

D'après ces relations, si $\kappa_A \gg 1$, les performances du système peuvent être très sensibles aux variations des composantes de \mathbf{x} . Au contraire, si $\kappa_A \approx 1$, les variations relatives des performances sont du même ordre de grandeur que celles de \mathbf{x} et sont ainsi minimisées. Dans ce cas, la solution du problème de conception peut être considérée comme "robuste". Il paraît donc clairement que la recherche de la solution robuste pour un problème de conception peut être aussi ramenée à la recherche des coefficients de la matrice \mathbf{A} qui minimisent son conditionnement. On agit ici sur les paramètres. L'équation (1) permet aussi d'écrire la relation suivante:

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} \quad (3)$$

où $\delta \mathbf{f}$ représente les variations de la performance \mathbf{f} et $\delta \mathbf{x}$ les tolérances des variables dimensionnelles du mécanisme. L'ellipsoïde de la Fig. 1 représente la distribution de la sensibilité de la performance aux variations des variables \mathbf{x} . Les points de l'ellipsoïde correspondent à des variations identiques de \mathbf{f} . De ce fait, si la tolérance des variables \mathbf{x} est proportionnelle à δx_1 la sensibilité de \mathbf{f} aux variations de \mathbf{x} sera minimale. Inversement, si la tolérance est proportionnelle à δx_3 la sensibilité de \mathbf{f} sera maximale. Cette approche est abordée par [19, 22].

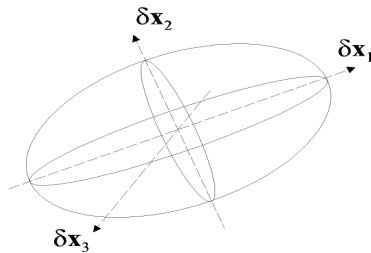


Figure 1: Ellipsoïde de sensibilité de la performance aux variations

2.2. Analyse des tolérances dimensionnelles et géométriques

Un autre domaine qui s'intéresse aux variations est celui des tolérances dimensionnelles et géométriques. Les travaux sont très nombreux dans ce domaine. L'approche statistique conduit à des tolérances plus larges en acceptant qu'un pourcentage raisonnable et calculé de pièces soit hors tolérances [1, 2]. Il existe plusieurs raisons qui justifient l'utilisation des outils statistiques en analyse des tolérances. Ces raisons sont aussi bien d'ordre technique

qu'économique [16, 17]. Depuis une dizaine d'année, des états de l'art avec des points de vues complémentaires ont été publiés sur l'analyse statistique des tolérances [1, 10, 15, 21]. A notre connaissance, toutes les méthodes d'analyse statistique utilisent un paramétrage de la géométrie des pièces et travaillent principalement sur l'exploitation de l'équation de type :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

où y représente la résultante en fonction des n variables dimensionnelles x_i . Les méthodes d'analyse statistique s'appuient sur des hypothèses et des conditions d'application très précises. L'hypothèse statistique de base permet d'accepter qu'un pourcentage raisonnable et calculé de pièces ne satisfasse pas la fonction souhaitée. L'hypothèse la plus importante et la plus couramment utilisée suppose la linéarité de la fonction f .

Si la fonction f est linéaire vis à vis des composantes de \mathbf{x} ,

$$y = f(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (5)$$

Lorsqu'elle n'est pas linéaire, elle est approchée par un développement de Taylor d'ordre 1. Les coefficients a_i de l'approximation linéaire sont évalués à l'aide de la dérivée au point $x_i = \mu_i$ pour $i=1, \dots, n$. Lorsque la fonction est explicite, toutes les constantes sont mises dans a_0 et $a_i = \partial f / \partial x_i$. Par contre, si la fonction n'est pas explicite, la dérivée est approchée par des méthodes numériques. Le calcul de l'espérance de la fonction linéaire $y=f(\mathbf{x})$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\mu_y = a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n \quad (6)$$

où $E(x_i) = \mu_i$ représente l'espérance de la variable aléatoire x_i ; $E(y) = \mu_y$. La relation suivante est valable uniquement lorsque toutes les variables x_i sont indépendantes:

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 \quad (7)$$

où $Var(x_i) = \sigma_i^2$ et $Var(y) = \sigma_y^2$, $Var(x_i)$ étant la variance de la variable aléatoire x_i et σ_i représente son écart type.

Du point de vue pratique, la condition de l'indépendance est souvent violée. Cependant, au niveau de la conception ou l'on ne dispose pas de toutes les informations sur les moyens et les processus de la fabrication, l'hypothèse de l'indépendance semble être raisonnable. A ce stade, nous sommes capables d'estimer la moyenne μ_y et l'écart type σ_y de la fonction y , à condition que les variables x_i soient indépendantes. Cependant, ces deux paramètres ne permettent pas de connaître le comportement de la distribution de la résultante de y . Une première approximation consiste à poser des hypothèses sur les distributions des paramètres x_i et de déduire la distribution résultante y . L'hypothèse la plus populaire est celle d'une distribution normale $N(\mu_y, \sigma_y)$. Cette hypothèse est certainement le meilleur choix du point de vue économique [6, 14, 15]. Elle suppose que la distribution de chaque variable x_i est une loi normale centrée et symétrique par rapport au milieu de l'intervalle de tolérance. Elle permet d'établir une relation entre la valeur de l'écart type σ_i de chaque paramètre et son intervalle de tolérance $\pm T_i$. Une autre hypothèse permet de prendre en compte le glissement de la distribution par rapport au milieu de l'intervalle. Elle suppose que l'intervalle de tolérance est supérieur à $k\sigma_i$. La valeur de k est choisie en fonction du nombre de pièces défectueuses pouvant être toléré.

L'approche de l'analyse statistique par zone de tolérance est le résultat des travaux de Kane [9] sur les indices de capabilité ainsi que des travaux sur la philosophie 6 σ introduite par Harry et Stewart [7]. La propriété polyvalente du modèle 6 σ est sa capacité à distinguer le long et le court terme. Les indices de capabilité peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$C_p = \frac{\tau}{3\sigma}; C_{pk} = \frac{\tau - |m - \mu|}{3\sigma} \text{ et } C_c = \frac{|\mu - m|}{\tau} \quad (9)$$

où 2τ représente l'étendu de l'intervalle de tolérance et m son milieu. A partir de la définition des paramètres C_p , C_{pk} et C_c , les industriels utilisent trois constantes P , K et F pour décrire le processus :

$$P \leq C_p, K \leq C_{pk} \text{ et } C_c \leq F \quad (10)$$

Ces trois inéquations définissent une zone statistique de tolérance dans le plan (μ, σ) . On obtient des zones dont l'aspect est semblable à celui des Fig. 2 et Fig. 3. Dans la pratique, toutes les combinaisons des paramètres P , K et F ne sont pas utilisées par les entreprises [16]. La représentation par zones de tolérances statistiques a été implicitement utilisée dans la fonction perte de Taguchi [16]. Dans cette approche, la fonction perte de Taguchi représente le coût généré par l'écart de la valeur de la dimension considérée par rapport à sa valeur nominale. Ce coût peut être écrit sous la forme quadratique suivante :

$$c(x) = c_0 + c_1 (x - m)^2$$

où c_0 et c_1 sont des constantes relatives au coût fixées par l'entreprise. Soit $f(x)$ la densité de probabilité relative à la variable aléatoire x . Le coût moyen est défini par :

$$C_{\text{moy}} = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x) f(x) dx = c_0 + c_1 [(\mu - m)^2 + \sigma^2]$$

On obtient donc l'équation d'un cercle dans le plan (μ, σ) . Les courbes de niveau dépendent des constantes C_{moy} , c_0 et c_1 . L'ensemble des points du demi-cercle correspond à un coût moyen maximum. La représentation donnée par la Fig. 4 montre clairement l'analogie avec la notion de zone de tolérance statistique. Notons enfin que la description par zone de tolérances statistique est définie pour une composante x et ne permet pas de déduire directement la zone statistique de la résultante y [17].

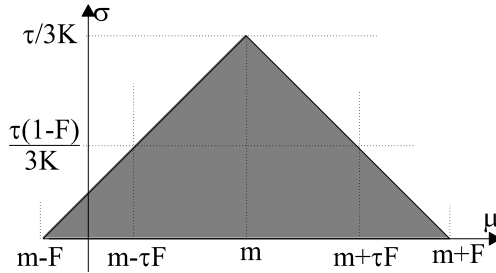


Figure 2 : $3K\sigma - \tau + m \leq \mu \leq -3K\sigma + \tau + m$

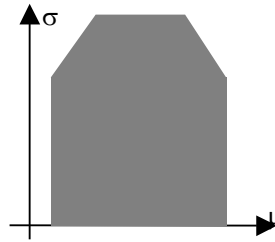


Figure 3: Zone de tolérance statistique pour $1.5 \leq C_p$, $1.0 \leq C_{pk}$ et $C_c \leq 0.5$

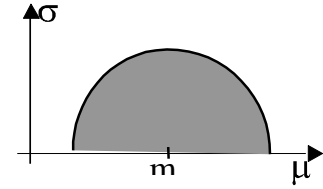


Figure 4: Zone de tolérances de Fonction perte de Taguchi dans le plan (μ, σ)

2.3. Conception robuste

Le concept de la robustesse a été introduit pour la première fois par *Taguchi* en 1978. Par contre, il fallait attendre le début des années 90 pour trouver les premières contributions qui intègrent ce concept dans le cadre de la conception. Globalement, on peut distinguer deux types d'approches. Les approches statistiques et les approches déterministes.

Les approches statistiques exploitent la formulation en terme de problème d'optimisation et intègrent les principes de la robustesse. La formulation générale est la suivante : Problème P : minimiser $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sous contraintes : $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_u)$ est le vecteur des variables de conception de dimension u . $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_v)$ est le vecteur des paramètres de conception de dimension v . $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ est la fonction critère ou coût à optimiser. $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), g_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \dots, g_w(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$ représente les w contraintes du problème d'optimisation.

Ce problème est défini de façon rigide, il ne tient compte ni des variations des variables et paramètres ni des variations des performances de la fonction critère et encore moins de l'effet de la présence d'une solution sur la frontière

du domaine "rigide" \mathbf{D} de faisabilité défini par les contraintes g_i . Dans le cadre de la conception robuste, la minimisation des variations des performances est liée à la minimisation de l'espérance et de l'écart type de la fonction critère. En effet, l'analyse détaillée des expressions de μ_y et de σ_y permet de voir qu'il est possible de réduire les variations de y , ou bien σ_y , en *ajustant* les valeurs nominales des variables. En effet, l'expression de σ_y est généralement fonction des μ_{x_i} . Sans que le coût soit augmenté de façon significative, le choix judicieux et l'ajustement des valeurs nominales est un premier pas vers la robustesse. Cette réduction peut être effectuée sans agir sur l'étendu de l'intervalle de tolérance de la variable. La Fig. 5 montre l'effet des variations sur le niveau des performances. D'autre part, la transformation des inéquations de contraintes en inéquations statistiques définit un domaine de faisabilité plus réduit (voir Fig. 6). La formulation générale est la suivante [12, 13, 18] :

$$\begin{array}{l} \text{Problème } P_Robuste: \\ \left| \begin{array}{l} \text{minimiser } (\mu_y(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \sigma_y(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \\ \text{sous contraintes : } \mu_{g_i}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + k_i \sigma_{g_i}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0 \text{ avec } i=1, \dots, u+v. \end{array} \right. \end{array}$$

k_i est une valeur choisie par le concepteur.

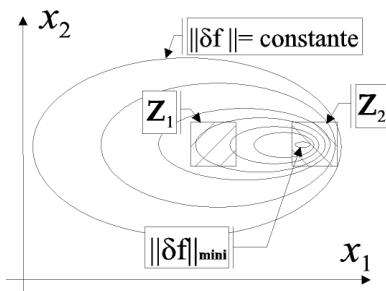


Figure 5 : sensibilité des isocourbes

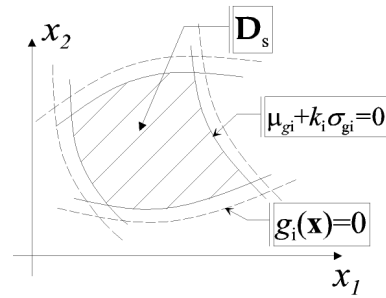


Figure 6 : nouveau domaine de faisabilité

Pour le calcul localement de (μ_y, σ_y) et $(\mu_{g_i}, \sigma_{g_i})$ à partir des expressions du critère f et des contraintes g_i , on utilise les mêmes hypothèses et relations que celles utilisées en analyse statistique en supposant que les valeurs $(\mu_{x_i}, \sigma_{x_i})$ et $(\mu_{p_i}, \sigma_{p_i})$ sont connues.

$$\mu_{g_i} = g_i(\mu_{\mathbf{x}}, \mu_{\mathbf{p}}) \quad (8)$$

$$\sigma_{g_i}^2 = \sum_{i=1}^u \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^v \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i} \right)^2 \sigma_{p_i}^2 \quad (9)$$

Lorsque les précisions de ces relations ne sont pas satisfaisantes, il est possible d'utiliser des approximations à l'ordre 2 de (μ_y, σ_y) et $(\mu_{g_i}, \sigma_{g_i})$. Il est également possible d'utiliser la méthode de Monté Carlo à chaque évaluation du critère et des contraintes. Dans ce cas, le coût du calcul est généralement très élevé [5, 8, 11, 18]. Notons par ailleurs que la robustesse des problèmes de conception qui nécessite la prise en compte des contraintes de type $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ n'a jamais été abordée dans la littérature.

Nous venons de voir dans ce paragraphe que le problème de robustesse est lié à la définition de la notion de performances et dépend entièrement de la formulation correcte du critère et des contraintes. Ainsi, nous proposons dans le paragraphe suivant des critères relatifs aux mécanismes articulés.

3. Analyse des mécanismes articulés

La définition de la tâche d'un mécanisme et son adaptation dans un site industriel peut être formulée par un problème d'optimisation mathématique. Cette étape nécessite une formalisation importante des objectifs ou critères appropriés ainsi que l'intégration des contraintes relatives à la tâche. Ces critères et contraintes peuvent découler directement du cahier des charges de la tâche. Ils peuvent également être associés au comportement propre du système mécanique utilisé. Ce paragraphe présente les critères et les contraintes les plus pertinents. Certains de ces critères sont détaillés

dans [3]. A titre d'exemple, voici une formulation classique du problème de génération de trajectoire d'un robot sujette à être réalisée sans collision avec l'environnement en un temps minimum. Elle peut être présentée de deux manières différentes : Trouver la trajectoire T telle que :

P_1 | minimiser le temps de cycle le long de T , sous contrainte de ne pas avoir de collision le long de cette même trajectoire,

ou encore :

P_2 | minimiser un critère pondéré entre le temps de cycle le long de cette même trajectoire T et une grandeur caractéristique des collisions effectives ou potentielles (par exemple la profondeur en collision entre le robot et son environnement ou la proximité des obstacles lorsqu'il n'y a pas collision).

Cette formulation, très générale, ne précise pas explicitement la prise en compte de la robustesse de la tâche vis-à-vis des variations des paramètres et des variables d'optimisation. L'évitement des singularités éventuelles du mécanisme est généralement sous-entendu. Nous cherchons donc à définir les indices de performances et les contraintes à prendre en compte pour assurer la robustesse de la solution. Dans ce papier nous nous limitons aux mécanismes articulés.

Un mécanisme est un ensemble de pièces, déformables ou non, assemblées entre elles par des liaisons mécaniques. Les liaisons mécaniques d'un mécanisme articulé sont soit des pivots, soit des glissières. Les mécanismes articulés sont parfois appelés « manipulateurs ». Il existe deux types de manipulateurs, les manipulateurs sériels et les manipulateurs parallèles. Les manipulateurs sériels sont formés d'une chaîne cinématique simple dont les éléments sont reliés à deux corps mis à part leur base et leur organe effecteur qui ne sont reliés qu'à un seul corps. Le manipulateur de type RR représenté par la Fig. 7 est un manipulateur sériel, la barre de longueur l_1 est reliée à deux corps (le bâti et la barre de longueur l_2) alors que le bâti et la barre de longueur l_2 ne sont reliés qu'à un seul corps.

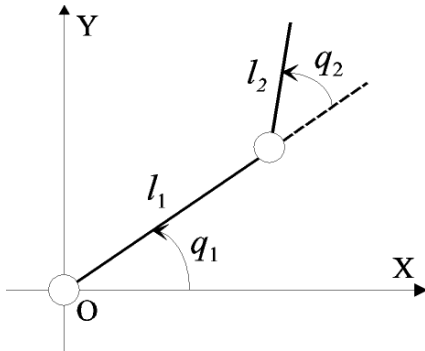


Figure 7: manipulateur sériel de type RR

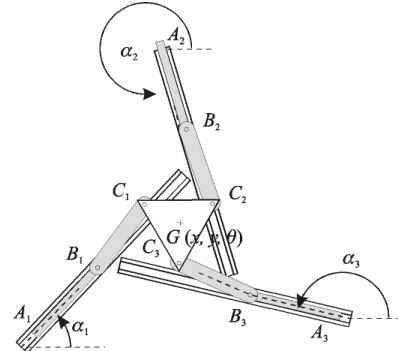


Figure 8: manipulateur parallèle de type $3PRR$

Les manipulateurs parallèles sont quant à eux des structures articulées en chaîne cinématique fermée, constituées d'un organe terminal à au moins un degré de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes. Le manipulateur de type $3PRR$ représenté par la Fig. 8 est un exemple de manipulateur d'architecture parallèle ayant deux degrés de liberté en translation et un degré de liberté en rotation. Par ailleurs, il est commandé par trois actionneurs prismatiques.

3.1. Espace de travail et ensemble articulaire

L'espace de travail d'un manipulateur est défini comme étant l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère lié à son organe terminal. Q est le domaine articulaire accessible : $Q = \{q \in EA_n, \forall i \leq n, q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max}\}$. Le vecteur des variables articulaires d'un manipulateur est noté q et celui de ses coordonnées généralisées est noté w . ($q \in Q$ et $w \in W$). Par ailleurs, l'espace de travail W peut être défini par l'image de Q par l'opérateur géométrique f du robot comme le montre la Fig. 9.

$$W = f(Q) \quad (10)$$

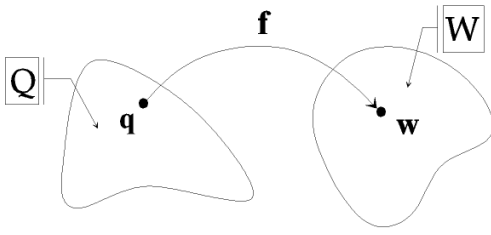


Figure 9: ensemble articulaire – espace de travail

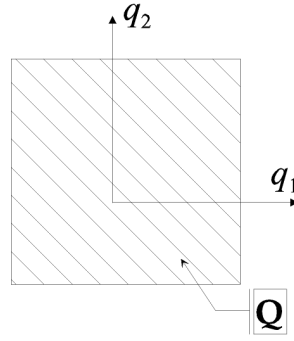


Figure 10: espace articulaire du manipulateur de type *RR*

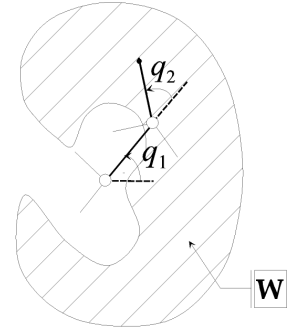


Figure 11 : espace de travail du manipulateur de type *RR*

La Fig. 10 représente l'espace articulaire et la Fig.11 représente l'espace de travail du manipulateur sériel de type *RR* avec des butées articulaires. Ici, une condition nécessaire à la robustesse du mécanisme est que les points à atteindre par son organe effecteur soient compris dans l'espace de travail **W**.

Pour comprendre les propriétés associées aux manipulateurs, il est nécessaire de définir la matrice jacobienne cinématique **J**. Cette matrice lie les vitesses des variables articulaires du manipulateur à son torseur cinématique. Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ tels que

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (11)$$

$$d\mathbf{w} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) d\mathbf{q} = \mathbf{J} d\mathbf{q} \quad (12)$$

où **J** est la matrice jacobienne cinématique du manipulateur. Si le manipulateur est parallèle, la matrice jacobienne **J** peut être décomposée en une matrice jacobienne parallèle **A** et une matrice jacobienne sérielle **B**. En l'occurrence, les matrices **A** et **B** permettent de déterminer respectivement les singularités parallèles et sérielles du manipulateur :

$$\mathbf{A} d\mathbf{w} + \mathbf{B} d\mathbf{q} = 0 \quad (13)$$

3.2. Singularités

Les manipulateurs de type sériel ou parallèle peuvent rencontrer des configurations dites singulières. Au voisinage de ces configurations, une augmentation des efforts dans les articulations du manipulateur ou une perte de rigidité peut avoir lieu alors que ses articulations motorisées sont bloquées. Son organe effecteur peut encore gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est évidemment d'éviter les configurations singulières. Les singularités d'un manipulateur correspondent aux configurations annulant le déterminant de sa matrice jacobienne cinématique. En ce qui concerne les manipulateurs d'architecture parallèle, les singularités parallèles correspondent aux configurations annulant le déterminant de la matrice jacobienne parallèle **A** et les singularités sérielles à celles annulant le déterminant de la matrice jacobienne sérielle **B**. Les configurations singulières des manipulateurs non redondants font intervenir la notion d' *aspects*. Les aspects sont les plus grands domaines connexes ouverts de **Q**, ne possédant pas de configuration singulière. Ils réalisent une partition de **Q**. La Fig. 12 montre les deux aspects du manipulateur de type *RR*. Le premier aspect est associé à la posture "coude haut", le second correspond aux configurations de la posture "coude bas". La figure montre les deux aspects dans l'espace articulaire et leurs images dans l'espace cartésien. En outre, la jonction entre les deux aspects dans **Q** est à éviter de manière à s'éloigner des configurations singulières sérielles. La Fig. 13 représente le manipulateur parallèle de type *3PRR* dans une configuration singulière parallèle. Dans ce cas, il est possible de bouger localement l'organe effecteur du manipulateur alors que ses actionneurs sont bloqués. Le manipulateur gagne donc un degré de liberté.

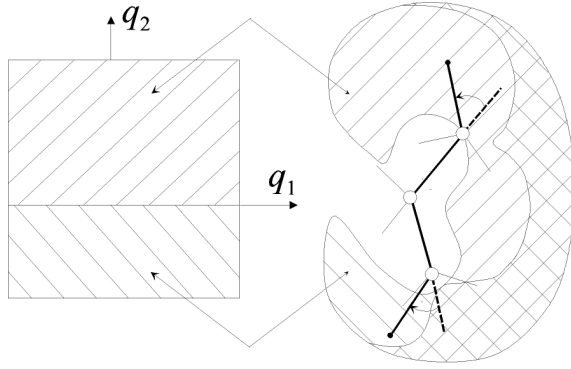


Figure 12: aspects et postures du manipulateur de type *RR*

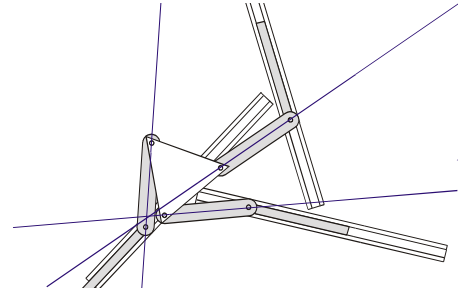


Figure 13: singularité parallèle du manipulateur de type *3PRR*

3.3. Parcourabilité

L'espace de travail permet d'analyser les performances globales d'accessibilité d'un robot manipulateur. Or, une simple analyse d'accessibilité peut s'avérer insuffisante, même lorsque toutes les contraintes (butées, collisions) semblent avoir été prises en compte. Une condition nécessaire à la robustesse d'un manipulateur est bien évidemment que ses trajectoires soient parcourables. Si l'effecteur peut se déplacer entre deux points de l'espace de travail, cela signifie qu'il existe une trajectoire de liaison. Un changement de posture en cours de mouvement est donc nécessaire, ce qui oblige l'organe terminal à passer par une configuration "bras tendu" et donc par un point de la frontière de l'espace de travail: la trajectoire doit être quittée et n'est donc pas parcourable. Il existe deux niveaux de parcourabilité, selon que la trajectoire entre les points soit spécifiée ou non. Pour chaque niveau de parcourabilité, il est utile de déterminer les régions de l'espace de travail qui sont réellement parcourables.

3.4. Dextérité

Contrairement aux outils destinés à des analyses d'accessibilité et de parcourabilité, il existe des outils permettant d'évaluer des performances en un point particulier de l'espace de travail ou pour une configuration articulaire donnée. Ces analyses locales peuvent être complémentaires des précédentes. La dextérité, par exemple, peut être définie intuitivement comme mesurant l'aptitude de l'organe terminal du robot à effectuer "facilement" des petits déplacements arbitraires autour d'un point de l'espace de travail. La dextérité est étroitement liée au rapport entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires. Elle est généralement évaluée à l'aide de la notion de manipulabilité ou de

l'indice d'isotropie. Pour un domaine de vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$ défini par la sphère unité $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$, le domaine des vitesses opérationnelles réalisables est caractérisé par un ellipsoïde défini par :

$$\dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{x}} \leq 1 \quad (14)$$

où $\dot{\mathbf{x}}$ désigne la vitesse opérationnelle. Les axes principaux de l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles, encore appelé *ellipsoïde de manipulabilité en vitesse* " E_v ", sont donc définis par les vecteurs propres \mathbf{e}_i de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$, et les longueurs des demi-axes sont les valeurs singulières σ_i de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. En vertu du principe des travaux virtuels, il existe une dualité entre " E_v " et l'ellipsoïde en effort " E_f " (Fig. 14 et 15) défini à partir de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ par :

$$\mathbf{f}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{f} \leq 1 \quad (15)$$

où \mathbf{f} est le vecteur des forces exercées par l'effecteur sur son environnement. En outre, les directions principales de E_f sont identiques à celles de E_v et les longueurs des demi-axes de la première sont les inverses respectives de celles de la seconde. Physiquement, le plus grand axe de E_v donne la direction selon laquelle le manipulateur est capable

d'engendrer la plus grande vitesse; le plus petit axe est celui le long duquel le contrôle de la vitesse est le plus précis. De façon similaire, les directions optimales pour exercer un effort d'une part, et pour réaliser un contrôle fin des efforts d'autre part, correspondent respectivement à celles du plus grand et du plus petit axe de E_f . En définitive, la direction optimale pour contrôler la vitesse de façon précise est aussi celle où le robot absorbe le mieux les grandes perturbations en effort et la direction optimale pour contrôler un effort est celle où le robot peut rapidement modifier sa vitesse. L'indice de manipulabilité en vitesse est défini par le scalaire:

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (16)$$

Il constitue en un point donné et pour une configuration articulaire donnée, une mesure de l'aptitude de l'effecteur à se déplacer à partir de ce point.

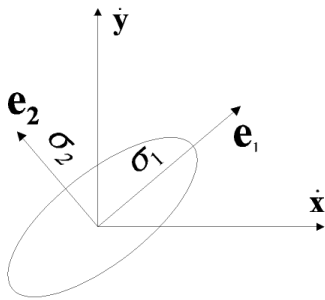


Figure 14: ellipsoïde de manipulabilité en vitesse

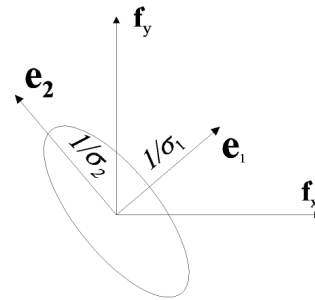


Figure 15: ellipsoïde de manipulabilité en effort

L'indice d'isotropie k est le conditionnement de la matrice jacobienne \mathbf{J} . En robotique, cet indice permet d'évaluer la précision avec laquelle les vitesses opérationnelles de consigne pourront être suivies à partir des vitesses articulaires calculées par l'inverse de \mathbf{J} . Physiquement, lorsque le manipulateur se trouve dans une configuration isotrope (*i.e.* lorsque $k=1$), l'organe terminal se déplace avec la même faculté dans toutes les directions. En conception robuste de mécanismes, cette dernière propriété est très convoitée.

3.5. Généricité

Dans le cadre de la conception robuste de mécanismes, il est nécessaire de savoir si le mécanisme étudié est générique ou non puisque de faibles perturbations de ses paramètres peuvent changer ses propriétés globales lorsqu'il est non-générique [20]. La généricité d'un manipulateur implique que l'ensemble de ses configurations singulières forme une ou plusieurs surface(s) uniforme(s) et régulière(s) dans le domaine articulaire, c'est à dire qui ne se coupent pas. La propriété fondamentale d'un robot générique est sa stabilité vis-à-vis de petites perturbations de ses paramètres. En d'autres termes, un robot générique reste générique si l'on modifie légèrement et de façon aléatoire ses paramètres. Les robots non-génériques sont reconnaissables par leurs singularités qui se coupent dans le domaine articulaire. Ils sont instables: sous l'effet d'une infime modification de leurs paramètres géométriques, ils deviennent génériques. En toute rigueur, il n'est pas possible de fabriquer un robot non générique puisque les tolérances de fabrication ne permettent pas d'obtenir les valeurs exactes des paramètres géométriques. Les robots industriels conçus comme non génériques sont ainsi génériques. Cependant, le sous espace générique auquel il appartient est ignoré et ses propriétés globales sont ainsi méconnues. En définitive, l'ensemble des robots génériques réalise une partition de l'espace de tous les robots en sous-espaces disjoints de robots génériques. Dans chaque sous espace, les robots ont des propriétés homogènes (même topologie des surfaces de singularité dans le domaine articulaire, même nombre d'aspects, même nombre de solutions par aspect).

4. Conclusion

Ce papier présente un état de l'art des méthodes utilisées en conception robuste de mécanismes et rappelle quelques définitions relatives aux mécanismes articulés. La méthode d'optimisation présentée n'utilise que des contraintes

d'inégalité. Il serait donc intéressant de traiter un problème avec des contraintes d'égalité. Par ailleurs, les méthodes déterministe et non-déterministe sont actuellement présentée de façon indépendante. Cependant, ces méthodes sont elles liées ? En outre, il n'est pas toujours évident d'intégrer les critères métiers, définis dans le chapitre portant sur les mécanismes articulés, dans un problème de conception robuste. Un effort est donc nécessaire pour développer des méthodes de conception robuste permettant de concevoir des mécanismes respectant ces critères.

Références

- [1] **Bjorke O** — Computer Aided tolerancing, *ASME Press, second edition 1989*, , (1989).
- [2] **Chase K. W. et Parkinson A. R.** — A Survey of Research in the Application of Tolerance Analysis to the Design of Mechanical Assemblies, *Research In Engineering Design*, 3, 1991, pp. 23-37, (1991).
- [3] **Chedmail, Dombre et P;Wenger**, *La CAO en robotique Outils et méthodologies*, Editions Hermes, 1998.
- [4] **Dahlquist G., Bjork A.** Perturbation analysis, *Numerical method*, pp 176-177, 1969.
- [5] **Du X., Chen W.** — Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design, *Trans ASME Jnl Mechanical Design*, Dec 2000, 122 (4), pp. 385-394, (2000),
- [6] **Greenwood W.H and Chase K.W** — Root sum squares tolerance analysis with nonlinear problems, *Transaction of the ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol 112, November 1990, pp. 382-384, (1990),
- [7] **Harry M.J. and Stewart R.** — Six sigma mechanical design tolerancing, *Tech. Report 6 sigma 2-10/88 Motorola Corporation*, , (1988).
- [8] **Kalsi M., Hacker, K. Lewis, K.** — A comprehensive robust design approach for decision trade-offs in complex systems design, *Trans ASME Jnl Mechanical Design*, Mar 2001, 123 (1), pp. 1-10, (2001),
- [9] **Kane V. E** — Process Capability indices, *Jour. Qual. Technol.*, 18(1), 1986, pp. 41-52, (1986).
- [10] **Nigam S. D. et Turner J. U.** — Review of statistical approaches to tolerance analysis, *Computer-Aided Design*, 27(1), pp. 6-15, (1995), nigam959
- [11] **Parkinson D.B.** — The application of a robust design method to tolerancing, *Trans ASME Jnl Mechanical Design*, Jun 2000, 122 (2), pp. 149-154, (2000).
- [12] **Parkinson A. and Sorensen C. and Pourhassan, N.** — A general approach for robust optimal design, *Transactions of ASME*, vol. 115, march 1995, pp. 74-80, (1993).
- [13] **Parkinson, A.** — Robust mechanical design using engineering models, *Transactions of ASME*, vol. 117, june 1995, pp. 48-54, (1995).
- [14] **Skowronski V.J and Turner J.U** — Estimating gradients for statistical tolerance synthesis, *Computer Aided Design*, Vol 28, n 12, 1996, pp. 933-941, (1996).
- [15] **Skowronski V.J and Turner J.U** — Using Monte-Carlo variance reduction in statistical tolerance synthesis, *Computer Aided Design*, Vol 29, n 1, 1997, pp. 63-69, (1997).
- [16] **Srinivasan V.** — Role of statistics in achieving global consistency of tolerances, *Proc. of the 6th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, The Netherlands, 22-24 March 1999*, pp 395-404, (1999).
- [17] **Srinivasan V., O'Connor M. A. et Scholz F.W.** — Techniques for composing a Class of Statistical Tolerances Zones, *IBM Research Division. Report n 20254*, (1996)
- [18] **Sundaresan S. and Ishii K. and Houser D.R.** — A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints, *DE.Vol 65-1, Advances in Design Automation - Volume1 ASME 1993*, pp. 379-386, (1993).
- [19] **Ting, K.L. and Long, Y.** — Performance quality and tolerance sensitivity of mechanisms, *Transactions of ASME*, vol. 118, march 1996, pp. 144-150, (1996).
- [20] **Wenger P.** — Classification of 3R positioning manipulators, *Journal of Mechanical Design*, ASME, vol. 120, june 1998, pp. 327-332, (1998).
- [21] **Whitney D. E. et Gilbert O.L., and M. Jastrzebski** — Representation of geometric variations using matrix transforms for statistical tolerance analysis in assemblies, *Inter. Jour. Of Research In Engineering Design*, (6), pp. 191-210, (1994).
- [22] **Zhu, J. and Ting, K.L.** — Performance distribution analysis and robust design, *Journal of Mechanical Design*, ASME, vol. 123, march 2001, pp. 11-17, (2001).